ANALİZ II BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI

1-) $f(x) = x^4 e^{-2x^2}$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını ve monoton olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 4x^3 \cdot e^{-2x^2} + x^4 \cdot e^{-2x^2} \cdot (-4x)$

$$= 4x^3 \cdot e^{-2x^2}(1-x^2)$$

$$= 4x^3 e^{-2x^2}(1-x)(1+x)$$

f fonksiyonunun kritik noktaları $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1$ dir.

x		-1		0		1	
$4x^3(1-x)(1+x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
e^{-2x^2}	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$(-\infty,-1)$ ve $(0,1)$ aralıklarında $f'(x) > 0$ olduğundan f artandır. $(-1,0)$ ve $(1,\infty)$ aralıklarında $f'(x) < 0$ olduğundan f azalandır.

Artanlıktan azalanlığa geçtiği $x_2 = -1$ ve $x_1 = 1$ noktaları yerel maksimum, azalanlıktan artanlığa geçtiği $x_0 = 0$ noktası yerel minimum noktadır.

2) $f(x)=\begin{cases} \arccos(x-2) & , 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{\pi}{2}\cdot e^{x-2} & , 2 < x \leq 3 \end{cases}$ fonksiyonuna

$[1,3]$ aralığında Ortalama Değer teoremi uygulanabilir mi? Evet ise uygun c sayısını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> f fonksiyonu $[1,2)$ ve $(2,3]$ aralıklarında süreklidir. $x=2$ noktasını ayrı inceleyelim.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \arccos(x-2) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\pi}{2} e^{x-2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(2) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ olduğundan f, $x=2$ noktasında süreklidir. Ancak f fonksiyonu $x=2$ noktasında türevli değildir, gösterelim.

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{\pi}{2} e^{x-2} - \frac{\pi}{2}}{x-2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{\pi}{2} e^{x-2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\arccos(x-2) - \frac{\pi}{2}}{x-2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}} \lim_{x\to 2^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}}{1}$$

$$= -1$$

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan f, $x=2$ de türevli değildir ve verilen aralıkta Ortalama Değer teoremi uygulanamaz.

3) a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x + 6}\,dx$ integralinin değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x + 6}\,dx = \int \frac{-du}{u^2+u+6}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos x = u\\ -\sin x\,dx = du\end{array}}$$

$$= -\int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2}$$

$$u+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{23}}{2}\tan\theta$$

$$du = \frac{\sqrt{23}}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{23}}\cdot\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{2u+1}{\sqrt{23}}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{23}}\right)$$

$$= -\int \frac{\frac{\sqrt{23}}{2}\sec^2\theta\,d\theta}{\frac{23}{4}\tan^2\theta + \frac{23}{4}}$$

$$= -\int \frac{\frac{\sqrt{23}}{2}\cancel{\sec^2\theta}\,d\theta}{\frac{23}{4}\underbrace{\cancel{(\tan^2\theta+1)}}_{\sec^2\theta}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{23}}\theta + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{23}}\cdot\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{23}}\right) + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{2\cos x+1}{\sqrt{23}}\right) + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x + 6}\,dx = \left(-\frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\frac{2\cos x+1}{\sqrt{23}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\frac{1}{\sqrt{23}} + \frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\frac{3}{\sqrt{23}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}}\left(\arctan\frac{3}{\sqrt{23}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{23}}\right)$$

3)b) $\int_{x^3}^{1} f(t)\,dt = e^x + x^2 \sin x$ ise $f(\pi^3)$ değerini bulunuz.

Çözüm: $\left(\int_{x^3}^{1} f(t)\,dt\right)' = \left(e^x + x^2 \sin x\right)'$

$$0 \cdot f(1) - 3x^2 \cdot f(x^3) = e^x + 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

$x = \pi$ için

$$-3\pi^2 f(\pi^3) = e^\pi + 2\pi \underbrace{\sin \pi}_{=0} + \pi^2 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1}$$

$$-3\pi^2 f(\pi^3) = e^\pi - \pi^2$$

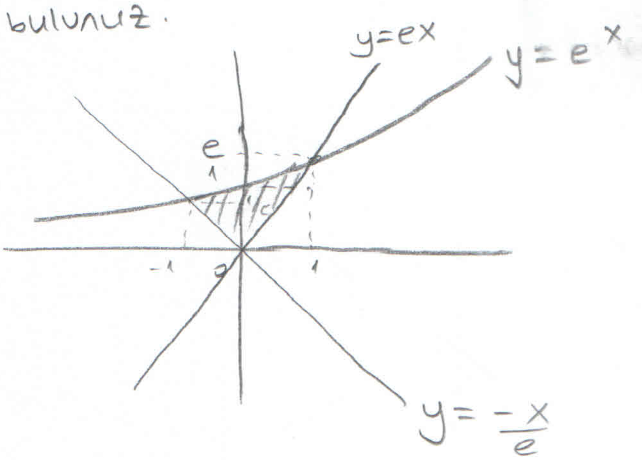
$$f(\pi^3) = -\frac{e^\pi}{3\pi^2} + \frac{1}{3}$$

4) $y=e^x$ eğrisi ile $y=\frac{-x}{e}$ ve $y=ex$ doğrularının sınırladığı bölgenin

a) Alanını bulunuz.

b) x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



a) $A = \int_{-1}^{0}\left(e^x-\left(\frac{-x}{e}\right)\right)dx + \int_{0}^{1}(e^x-ex)\,dx$

$= \left(e^x+\frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(e^x - e\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}$

$= \left(1-\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2e}\right)\right) + \left(e-\frac{e}{2}-1\right)$

$= \cancel{1}-\frac{3}{2e}+\frac{e}{2}-\cancel{1} = \frac{e^2-3}{2e}$

b) $V=\pi\left(\int_{-1}^{0}\left((e^x)^2-\left(\frac{-x}{e}\right)^2\right)dx + \int_{0}^{1}\left((e^x)^2-(ex)^2\right)dx\right)$

$=\pi\left(\int_{-1}^{0}\left(e^{2x}-\frac{x^2}{e^2}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(e^{2x}-e^2x^2\right)dx\right)$

$=\pi\left[\left(\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{e^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{e^{2x}}{2}-e^2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}\right]$

$=\pi\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{3e^2}\right) + \left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{3}\right)-\cancel{\frac{1}{2}}\right)$

$=\pi\left(-\frac{5}{e^2}+\frac{e^2}{6}\right)$

(5a) $A=\int_{-2}^{2}|x-1|\cdot \operatorname{sgn}(x+1)\cdot dx+\int_{-2}^{2}[\![\frac{x}{3}]\!]\cdot dx$

$x=1$ $\quad x=-1$ $\quad x=3k,\ k\in\mathbb{Z}$

$$A=\int_{-2}^{-1}|x-1|\cdot \operatorname{sgn}(x+1)\,dx+\int_{-1}^{1}|x-1|\cdot \operatorname{sgn}(x+1)\cdot dx+$$
$$+\int_{1}^{2}|x-1|\cdot \operatorname{sgn}(x+1)\cdot dx+\int_{-2}^{0}-1\cdot dx+\int_{0}^{2}0\cdot dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}-(x-1)\cdot(-1)\cdot dx+\int_{-1}^{1}-(x-1)\cdot 1\cdot dx+\int_{1}^{2}(x-1)\cdot dx-2$$
$$=\frac{x^2}{2}-x\Big|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2}-2=-2$$

(5b)

$$J=\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x-4}}dx=\int\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+4x-4}}dx=\underbrace{\int\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x-4}}dx}_{J_1}+\underbrace{\int\frac{2}{2\sqrt{x^2+4x-4}}dx}_{J_2}$$

$$J_1=\int\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x-4}}dx \Rightarrow \begin{array}{c} x^2+4x-4=u \\ (2x+4)\,dx=du \end{array} \Rightarrow J_1=\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\sqrt{u}\ \ldots (1)$$

$$J_2=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-4}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-8}}dx \Rightarrow \begin{array}{c} (x+2)=2\sqrt{2}\sec t \\ dx=2\sqrt{2}\sec t\cdot\tan t\cdot dt \end{array}$$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{2}\tan t}\cdot 2\sqrt{2}\sec t\cdot\tan t\cdot dt=\int\sec t\cdot dt=\ln|\tan t+\sec t|\ \ldots (2)$$

$$J=\sqrt{x^2+4x-4}+\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x-4}}{2\sqrt{2}}\right|+c$$

(6) $x^3+y^2-3xy+x+y+20=0$ için $x=-2$ alınırsa

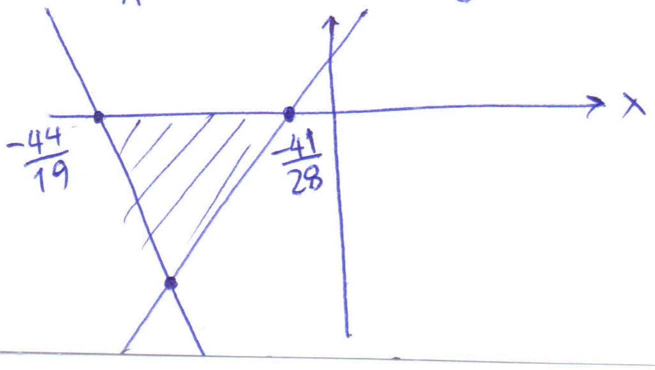
$-8+y^2+6y-2+y+20=0 \quad y^2+7y+10=0 \quad y=-2,\ y=-5$

olur. $A(-2,-2)$, $B(-2,-5)$ noktalarından geçen

teğet doğrularını için $y'=\dfrac{1+3x^2-3y}{-1+3x-2y}$ olup

$m_A=\dfrac{-19}{3}$, $m_B=\dfrac{28}{3}$.

$d_{T_A}: y+2=\dfrac{-19}{3}(x+2) \qquad d_{T_B}: y+5=\dfrac{28}{3}(x+2)$



$$S=\frac{\left(\frac{-41}{28}+\frac{44}{19}\right)\cdot\frac{151}{47}}{2}$$

$$=\frac{68403}{50008}$$

(7a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2x\,(2\sqrt{\tan x}-\tan^2x)}\,dx \Rightarrow$ $\quad \tan x=u^2$
$\sec^2x\cdot dx=2u\cdot du \Rightarrow$

$$\int\frac{1}{2u-u^4}\cdot 2u\cdot du=\int\frac{2\cdot du}{2-u^3}=\int\frac{2\cdot du}{(\sqrt[3]{2}-u)\cdot(u^2+\sqrt[3]{2}\,u+\sqrt[3]{4})}$$

$$=\frac{\ln(\sqrt[3]{2}u^2+\sqrt[3]{4}u+2)-2\ln(2-\sqrt[3]{4}u)+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt[3]{4}u+1}{\sqrt{3}}\right)}{3\sqrt[3]{4}}+C.$$

$u=\sqrt{\tan x}$ yazılmalıdır.

(7b) $M = \int (x+1) \cdot e^{x-1} \cdot \sin x \cdot dx$ için $u = x+1$ $dv = e^{x-1} \cdot \sin x$ alınırsa $du = dx$ $v = \frac{e^{x-1}}{2}(\sin x - \cos x)$ olup

$$M = (x+1) \cdot \frac{e^{x-1}}{2}(\sin x - \cos x) - \int \frac{e^{x-1}}{2}(\sin x - \cos x) \cdot dx$$

$$= (x+1) \cdot \frac{e^{x-1}}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\int e^{x-1} \cdot \sin x \cdot dx + \frac{1}{2}\int e^{x-1} \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= (x+1) \cdot \frac{e^{x-1}}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} e^{x-1} \cos x + C$$ olur.

---

8) $(a) \Rightarrow (b)$ $\underline{I} = \overline{I}$ olsun ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\underline{I}$ ve $\overline{I}$ nin tanımından dolayı $[a, b]$ aralığının öyle P_1 ve P_2 parçalanmaları vardır ki (infimum ve supremumun karakteristik özelliklerinden dolayı)

$$\underline{I} - A(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \ddot{U}(f, P_2) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. P, P_1 ve P_2 parçalanmalarının ortak incelmesi olsun. O halde son iki eşitlikten

$$\ddot{U}(f, P) \leq \ddot{U}(f, P_2) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{I} + \frac{\varepsilon}{2} < A(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = A(f, P_1) + \varepsilon \leq A(f, P) + \varepsilon$$

yazılabilir.

$(b) \Rightarrow (a)$ Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $[a, b]$ aralığının $\ddot{U}(f, P_*) - A(f, P_*) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $P_* = \{x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*\}$ parçalanmasının var olduğunu varsayalım. $\forall P \in \mathcal{P}$ parçalanması için $A(f, P) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \ddot{U}(f, P)$ olduğuna göre $P_* \in \mathcal{P}$ parçalanması için $0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq \ddot{U}(f, P_*) - A(f, P_*) < \varepsilon$ bulunur. Bu durum $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı için sağlanabileceğinden $\underline{I} = \overline{I}$ olmalıdır.